

XIV. POSLOUPNOSTI A ŘADY

§1. Posloupnosti

Def.: Necht' $\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel a A je libovolná množina. Zobrazení $a: \mathbb{N} \rightarrow A$ množiny všech přirozených čísel nebo $a: \{1, 2, 3, \dots, k\} \rightarrow A$ podmnožiny přirozených čísel do množiny A se nazývá posloupnost prvků množiny A , $k \in \mathbb{N}$.

Zobrazení $a: \mathbb{N} \rightarrow A$ se nazývá nekonečná posloupnost a zapisujeme ji $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zobrazení $a: \{1, 2, 3, \dots, k\} \rightarrow A$ se nazývá konečná posloupnost a zapisujeme ji $\{a_n\}_{n=1}^k$.

Jednotlivé hodnoty zobrazení, které je posloupností, nazýváme členy posloupnosti. Hodnotu posloupnosti v bodě $n \in \mathbb{N}$ nazýváme n -tým členem posloupnosti a zapisujeme a_n (nebo $a(n)$).

Pozn.: a) Je-li A číselná množina, tedy zobrazení a je funkcí, dostáváme posloupnost čísel. Zpravidla se omezíme na posloupnost reálných čísel, tedy $A = \mathbb{R}$.
Je-li $A = \mathbb{C}$ (množina komplexních čísel), jde o posloupnost komplexních čísel (tedy o komplexní funkci reálné proměnné).
b) Jestliže nebude výslovně uvedeno jinak, budeme pod pojmem posloupnost myslet vždy posloupnost reálných čísel.
c) Zpravidla budeme pracovat s nekonečnými posloupnostmi.

Pozn.: Posloupnost se nejčastěji určuje tak, že se ukáže, jak se najde její libovolný člen, tzn. určí se vzorec pro n -tý člen.

Def.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, pak tuto posloupnost nazýváme:

- a) rostoucí právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1}$,
- b) klesající právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > a_{n+1}$,
- c) nerostoucí právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_{n+1}$,
- d) neklesající právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$.

Posloupnost, která má jednu z těchto vlastností, nazýváme monotónní.

Posloupnost rostoucí nebo klesající nazýváme ryze monotónní.

Def.: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme prostou, právě když $\forall m, n \in \mathbb{N}: m \neq n \Rightarrow a_m \neq a_n$.

Def.: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme konstantní (stacionární), právě když $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = a_{n+1}$.

Def.: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme zdola omezenou, právě když $\exists k \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq k$.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme shora omezenou, právě když $\exists l \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq l$.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme omezenou, právě když je omezená shora i zdola.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která není omezená, nazýváme neomezenou.

Def.: Necht' je dána libovolná posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, \dots\}$, pak posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots, a_{k_n}, \dots\}$ nazýváme posloupností vybranou z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Def.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, pak posloupnost:

- $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme součet posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$,
- $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme rozdíl posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$,
- $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme součin posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$,
- $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme podíl posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li $b_n \neq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

§2. Aritmetická posloupnost

Def.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Tato posloupnost se nazývá aritmetická, právě když $\exists d \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: a_n = a_{n-1} + d$, číslo d se nazývá diference aritmetické posloupnosti (AP).

V.2.1.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je AP s diferencí d , pak platí:

- $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = a_1 + (n-1)d$,
- $\forall r, s \in \mathbb{N}: a_s = a_r + (s-r)d$.

[Dk.:]

V.2.2.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je AP s diferencí d . Necht' $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ je součet prvních n členů nekonečné AP nebo součet n -členné konečné AP, pak platí:

$$\forall n \in \mathbb{N}: S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

[Dk.:]

Důsledek V.2.2.: Pro součet S_n AP platí: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. }

V.2.3.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je AP, pak platí: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

[Dk.:]

Pozn.: a) Vyjádření členu a_n ve V.2.3. je vyjádřením aritmetického průměru čísel a_{n-1}, a_{n+1} .
b) Platí i obrácení V.2.3.

V.2.4.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je AP s diferencí d , pak platí:

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí $\Leftrightarrow d > 0$,
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající $\Leftrightarrow d < 0$,
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konstantní $\Leftrightarrow d = 0$.

V.2.5.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je AP s diferencí d , pak platí:

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola omezená $\Leftrightarrow d \geq 0$,
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená $\Leftrightarrow d \leq 0$,
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená $\Leftrightarrow d = 0$.

§3. Geometrická posloupnost

Def.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Tato posloupnost se nazývá geometrická, právě když $\exists q \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n = a_{n-1} \cdot q$, číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti (GP).

Pozn.: a) $a_1 = 0 \Rightarrow \forall q \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n = 0$, tj. konstantní posloupnost
b) $a_1 \neq 0, q = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: a_n = 0$

Pozn.: V dalších úvahách tyto posloupnosti vyloučíme, tedy budeme předpokládat $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$, pak $\forall n \in \mathbb{N}: q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

V.3.1.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je GP s kvocientem q , pak platí:

- a) $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,
- b) $\forall r, s \in \mathbb{N}: a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

[Dk.:]

V.3.2.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je GP s kvocientem q a necht' $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, pak $\forall n \in \mathbb{N}$ platí: 1. $q = 1: S_n = n \cdot a_1$,

$$2. q \neq 1: S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

[Dk.:]

V.3.3.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je GP, pak platí: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{[Dk.: } a_{n-1} = a_n \cdot q^{-1} \\ a_{n+1} = a_n \cdot q^1 \end{array} \right\} a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n^2 \cdot q^0 \Rightarrow |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad]$$

Pozn.: Vyjádřením čísla a_n ve V.3.3. je vyjádřením geometrického průměru čísel a_{n-1} a a_{n+1} .

V.3.4.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je GP s kvocientem q , pak platí:

- a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí $\Leftrightarrow (a_1 > 0 \wedge q > 1) \vee (a_1 < 0 \wedge q \in (0, 1))$,
- b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající $\Leftrightarrow (a_1 > 0 \wedge q \in (0, 1)) \vee (a_1 < 0 \wedge q > 1)$,
- c) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konstantní (stacionární) $\Leftrightarrow a_1 = 0 \vee q = 1$.

V.3.5.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je GP s kvocientem q , pak platí: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená $\Leftrightarrow |q| \leq 1$.

§4. Rekurentně určené posloupnosti

Pozn.!: a) Rekurentním určením posloupnosti rozumíme vyjádření jejího n -tého členu pomocí jednoho nebo několika (až všech) členů předcházejících (případně pomocí n).

Např.: AP: $a_n = a_{n-1} + d$ pro $\forall n > 1$

GP: $a_n = a_{n-1} \cdot q$ pro $\forall n > 1$

K jednoznačnému zadání rekurentně určené posloupnosti je třeba stanovit tzv. počáteční podmínky, tzn. je-li n -tý člen zadán pomocí $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_{n-k}$, je třeba zadat hodnoty prvních k členů.

b) Jestliže n -tý člen posloupnosti je vyjádřen přímo pomocí n , hovoříme o explicitním určením posloupnosti.

Např.: AP: $a_n = a_1 + (n-1)d$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

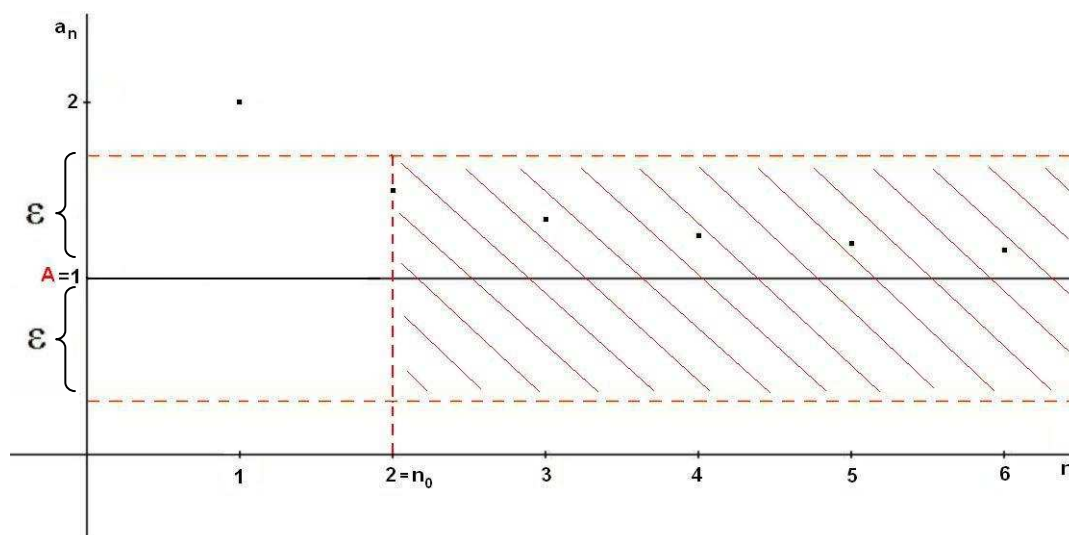
GP: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

Pozn.: Fibonacciho posloupnost

$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, její členy jsou tzv. Fibonacciho čísla

§5. Limita posloupnosti

Př.: Určete několik prvních členů posloupnosti $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, nakreslete její graf a určete, jak se posloupnost chová pro vzrůstající n .



Def.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}$ číslo. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnou číslu A , jestliže $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$, zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Pozn.: $|a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

Def.: Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu, pak se nazývá konvergentní, v opačném případě divergentní.

V.5.1.: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

[Dk.: Sporem: Necht' posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$, $A \neq B$.

Necht' $A < B$, položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_A \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_A : |a_n - A| < \varepsilon \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_B \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_B : |a_n - B| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 = \max\{n_A, n_B\} : |A - B| = |A - a_n + a_n - B| \leq |A - a_n| + |a_n - B| < 2\varepsilon = B - A - \text{spor}$$

V.5.2.: Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Pozn.: Obrácení předchozí věty neplatí, např.: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Důsledek V.5.2.: Jestliže posloupnost není omezená, pak je divergentní.

V.5.3.: Každá nekonečná posloupnost vybraná z konvergentní posloupnosti je konvergentní a má stejnou limitu.

Pozn.: Pokud lze vybrat z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě konvergentní posloupnosti s různou limitou, je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergentní. (např.: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$)

V.5.4.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti takové, že $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq a_n \leq b_n \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

[Dk.: Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |b_n - 0| < \varepsilon$
 $0 \leq a_n \leq b_n \Rightarrow |a_n| \leq |b_n| \Rightarrow |a_n - 0| \leq |b_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$]

Pozn.: Předpoklady předchozí věty lze zeslabit, nerovnosti nemusejí platit pro konečný počet členů posloupnosti.

V.5.5.: Věta o třech limitách

Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti takové, že $\exists m \in \mathbb{N}: \forall n \geq m: a_n \leq b_n \leq c_n \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

V.5.6.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti. Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ a necht' $c \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo, pak platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot A$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$ ($\forall n \in \mathbb{N}: b_n \neq 0, B \neq 0$).

[Dk.: a) $\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$
 $\forall n \geq n_0: |(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$

b) až e) analogicky]

Pozn.: Konvergence AP a GP:

- AP je konvergentní $\Leftrightarrow d = 0$
- GP je konvergentní $\Leftrightarrow q \in (-1, 1) \vee a_1 = 0$

Pozn.: Kromě limit zavedených v 1. definici tohoto paragrafu (tyto limity nazýváme vlastní limity) existují i tzv. nevlastní limity $+\infty$ a $-\infty$.

Def.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

- má nevlastní limitu $+\infty$ (posloupnost diverguje k $+\infty$)
 $\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}: a_n > K$, zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,
- má nevlastní limitu $-\infty$ (posloupnost diverguje k $-\infty$)
 $\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}: a_n < K$, zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Pozn.: Necht' $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0}$ je racionální lomená funkce, pak platí:

a) $\text{st } P(x) > \text{st } Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \pm \infty$,

b) $\text{st } P(x) = \text{st } Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \frac{a_n}{b_n}$,

c) $\text{st } P(x) < \text{st } Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$.

V.5.7.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Pozn.: Platí: $\frac{\pm \infty}{\infty} \rightarrow 0$, ale $\frac{\infty}{\infty}$ je neurčitý výraz,

$\frac{\pm 0}{0} \rightarrow \pm \infty$, ale $\frac{0}{0}$ je neurčitý výraz,

$0 \cdot \infty$ je neurčitý výraz; $\infty - \infty$ je neurčitý výraz.

Toto jsou všechny neurčité výrazy pro počítání $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$, u mocnin jsou další $0^0, \infty^0, 1^{\infty}$.

§6. Suprémum a infimum množiny, konvergence omezených monotónních posloupností

Def.: Necht' $M \neq \emptyset, M \subseteq \mathbb{R}$ je množina.

Číslo $a \in \mathbb{R}$ (pokud existuje) nazveme horní závorou množiny $M \Leftrightarrow \forall x \in M: x \leq a$.

Číslo $b \in \mathbb{R}$ (pokud existuje) nazveme dolní závorou množiny $M \Leftrightarrow \forall x \in M: x \geq b$.

Pozn.: a) Zřejmě platí: číselná množina M je shora omezená $\Leftrightarrow \exists$ alespoň 1 její horní závora.

b) Číslo $c \in \mathbb{R}$ není horní závorou množiny $M \Leftrightarrow \exists x \in M: x > c$.

Def.: Necht' $M \neq \emptyset, M \subseteq \mathbb{R}$ je množina.

Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazýváme suprémum množiny M , jestliže je její nejmenší horní závorou, tzn. že platí:

i) $\forall x \in M: x \leq s,$

ii) $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in M: x \leq t \Rightarrow t \geq s.$

Zapisujeme $s = \sup M$.

Číslo $t \in \mathbb{R}$ nazveme infimum množiny M , jestliže je její největší dolní závorou, tzn. že platí:

i) $\forall x \in M: x \geq t,$

ii) $\forall j \in \mathbb{R}, \forall x \in M: x \geq j \Rightarrow j \leq t.$

Zapisujeme $t = \inf M$.

Pozn.: a) Necht' $s = \sup M \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}, p < s: \exists x \in M: x > p$.

Necht' $t = \inf M \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}, p > t: \exists x \in M: x < p$.

b) Každá neprázdná množina má nejvýše 1 suprémum a 1 infimum.

V.6.1.: Věta o suprémum a infimu

a) Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má suprémum.

b) Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Pozn.: V.6.1. se v některých teoriích pokládá za axiom množiny $M \subseteq \mathbb{R}$. Jinde je toto tvrzení důsledkem tzv. Dedekindova axiomu.

DA: Dedekindův axiom

Necht' X, Y jsou dvě neprázdné podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ s těmito vlastnostmi:

1. $X \cup Y = \mathbb{R}$

2. $\forall x \in X, \forall y \in Y: x \leq y,$

pak k nim $\exists z \in \mathbb{R}: x \leq z \leq y$ pro $\forall x \in X, \forall y \in Y$.

V.6.2.: a) Každá shora omezená neklesající posloupnost reálných čísel je konvergentní.

b) Každá zdola omezená nerostoucí posloupnost reálných čísel je konvergentní.

Důsledek V.6.2.: Každá omezená monotónní posloupnost reálných čísel je konvergentní.